

Bézout faible

Développement pour les leçons 142¹, 144², 152³, 191⁴

1 Introduction

Le théorème de Bézout est un théorème classique de la géométrie algébrique. Ce dernier stipule que deux courbes algébriques de degré d et d' se rencontrent exactement dd' fois sous de bonnes hypothèses et un bon contexte. Nous démontrerons une version faible de ce théorème, à savoir le fait qu'il y a au plus dd' points d'intersection dans k^2 .

On notera k un corps **infini**. Si $P \in k[X, Y]$, on notera $V(P) = \{(x, y) \in k^2 \mid P(x, y) = 0\}$. L'objectif du développement est de démontrer que si P et Q n'ont pas de facteurs irréductibles communs et sont de degrés d et d' , alors

$$|V(P) \cap V(Q)| \leq dd'$$

2 Développement

On note $Z = V(P) \cap V(Q)$. L'objectif va être dans un premier temps de montrer que Z est fini. Pour se faire, on considère

$$P(X, Y) = \sum_{i=0}^p a_i(X)Y^i, \quad Q(X, Y) = \sum_{i=0}^q b_i(X)Y^i$$

avec $a_p(X) \neq 0$ et $b_q(X) \neq 0$. On note $R(X) = \text{Res}_X(P, Q)$ (qui est non-nul car P et Q sont premiers entre-eux). On va chercher à majorer le degré de $R(X)$. On va devoir étudier en détail les coefficients de la matrice de Sylvester M définie par

$$M_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i+p} & \text{si } j \leq q \text{ et } i-j \in [0, p] \\ b_{j-i} & \text{si } j \geq q \text{ et } j-i \in [0, q] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors que

$$R(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{p+q} M_{\sigma(j),j}(X) \right)$$

On se retrouve donc à étudier le degré des monômes de $R(X)$. Or, on sait que $\deg_X(a_k(X)) \leq d - k$. On obtient ainsi que $\deg_X(a_{j-\sigma(j)+p}) \leq d - j + \sigma(j) - p$. De même, on obtient que $\deg_X(b_{j-\sigma(j)}) \leq d' - j + \sigma(j)$. En mettant tout ensemble, on obtient

$$\begin{aligned} \deg_X \left(\prod_{j=1}^{p+q} M_{\sigma(j),j}(X) \right) &\leq \sum_{j=1}^q \deg_X(M_{\sigma(j),j}(X)) + \sum_{j=q+1}^{p+q} \deg_X(M_{\sigma(j),j}(X)) \\ &\leq \sum_{j=1}^q (d - j + \sigma(j) - p) + \sum_{j=q+1}^{p+q} (d' - j + \sigma(j)) \\ &= \sum_{j=1}^q (d - p) + \sum_{j=q+1}^{p+q} d' + \sum_{j=1}^{p+q} (\sigma(j) - j) \\ &\leq (d - p)q + pd' \\ &\leq dd' \end{aligned}$$

On obtient de même une minoration identique quant au nombre de racines de $S(Y) = \text{Res}_Y(P, Q)$. Comme on sait que Z est inclus dans l'ensemble des (a, b) tels que $R(a) = S(b) = 0$, on en déduit que $|Z| \leq (dd')^2$ et donc Z est fini.

On va maintenant montrer que l'on a au plus dd' éléments dans Z . Pour se faire, écrivons $Z = \{(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)\}$. Si tous les a_i sont distincts, alors on a directement que $r \leq \deg(R(X)) \leq dd'$. Maintenant, s'il existe i et j tels que $a_i = a_j$. En regardant l'ensemble $k \setminus \left\{ \frac{a_j - a_i}{b_j - a_i}, i \neq j \text{ et } b_j \neq b_i \right\}$, on trouve qu'il existe $u \in k$ tel que pour tout $i \neq j$, $a_i + ub_i \neq a_j + ub_j$ (on utilise ici le fait que k est infini). Considérons alors les polynômes

$$\tilde{P}(X, Y) = P(X - uY, Y), \quad \tilde{Q}(X, Y) = Q(X - uY, Y)$$

-
1. PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
 2. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
 3. Déterminant. Exemples et applications.
 4. Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Ces deux polynômes sont respectivement de degré $\leq d$ et $\leq d'$. On note $\tilde{Z} = V(\tilde{P}) \cap V(\tilde{Q})$ On a alors

$$\begin{aligned}(a, b) \in Z &\Leftrightarrow P(a, b) = Q(a, b) = 0 \\ &\Leftrightarrow P((a + ub) - ub, b) = Q((a + ub) - ub, b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{P}(a + ub, b) = \tilde{Q}(a + ub, b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + ub, b) \in \tilde{Z}\end{aligned}$$

Mais l'application $(a, b) \mapsto (a + ub, b)$ est bijective donc Z et $\tilde{Z}$ ont le même cardinal. De plus, $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ n'ont pas de facteurs irréductibles en communs et les éléments de $\tilde{Z}$ sont distincts, on conclut donc avec le travail préliminaire.

3 Bibliographie

J'ai dans le Zavidovique, page 47.